非線型Boltzmann方程式の線型化(非線型・非平衡状態の統計力学,基研研究会報告)

AUTHOR(S):

小貫, 明

非線型Boltzmann方程式の線型化

東大・理　小 貫　明

流体での保存量に対する flux の相関函数は $t^{-\frac{d}{2}}$ のようにふるまう。($t \gg t_{m.f.}$)。これは流体力学方程式が慣性項のため非線型になっていることから生ずる。さて，希薄気体はBoltzmann の方程式でよく記述される。Chappman, Cowling は上の量の時間発展は線型化したBoltzmann 方程式に従うとして輸送係数を求めている。これでは考える相関函数はすみやかに減衰する。Boltzmann 方程式の非線型項を単に捨てるのでなく，記憶をもつ項として線型項にくりこむと上記のLong tail が生ずる。このことはHauge が初めて気づいた。またMori，Fujisaka は非線型Langevin方程式を線型化する際，非線型項から生ずる記憶項について詳論した。

Boltzmann 方程式をかく。$f = (1+\psi)\, n\, \varphi_0(p)$ とおいて，

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} + nI\right)\psi(\mathbf{v}_1, \mathbf{r}_1; t) = n \int d\mathbf{p}_2\, d\mathbf{r}_2\, \varphi_0 T_{12}\, \psi(1)\psi(2), \qquad (1)$$

簡単のため $1 = (\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1)$，$2 = (\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2)$ とかいた。さらに

$$\psi_q(z) = \int_0^\infty dt \int d\mathbf{r}\, e^{-zt - iq\cdot\mathbf{r}}\, \psi(1, t), \qquad (2)$$

として (1) の右辺を摂動として iterative にとくと，

$$\psi_q(z) = \frac{1}{z+\Lambda_q(1)}\, \psi_q(t=0) + \frac{n}{z+\Lambda_q(1)} \sum_{q_1} \int d\mathbf{p}_2\, \varphi_0(2)\, T_{q,q_1}^{(1,2)}$$

$$\times \frac{1}{Z+\Lambda_{q-q_1}(1) + \Lambda_{q_1}(2)} \times \psi_{q-q_1}(1, t=0)\, \psi_{q_1}(2, t=0), \qquad (3)$$

ここで $\Lambda_q(1) = iq\cdot\mathbf{v}_1 + n\, I_q(1)$， (4)

$$T_{q,q_1}(1,2) = \frac{1}{V} \int d\mathbf{r}_1\, d\mathbf{r}_2\, e^{-iq\cdot\mathbf{r}}\, T_{12}\, e^{i(q-q_1)\cdot\mathbf{r}_1 + iq_1\cdot\mathbf{r}_2} \qquad (5)$$

ここに $q \ll \ell_{m.f.}^{-1}$ で Λ_q は5つの小さな固有値をもつ。

$$\Lambda_q = \begin{cases} \omega_q^{(i)} & (i = 1, 2, \cdots, 5) \\ \sim t_{m.f.}^{-1} & (i > 5) \end{cases}$$

(3) 式の第二項は，$q, q_1 \ll \ell_{m.f.}^{-1}$ で，この hydro mode だけひろうと，

$$\text{第二項} \cong \sum_{1 \leqq i, j \leqq 5} (1 - \mathcal{P}_h) | \alpha_i(p_1) \alpha_j(p_1) >$$

$$\int_{q, q_1 < q_c} \frac{dq_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{z + \omega_{q-q_1}^{(i)} + \omega_{q_1}^{(j)}} \overline{\alpha_i}(q - q_1) \overline{\alpha_j}(q_1), \tag{6}$$

ここに

$$\alpha_i(p) = 1, \mathbf{p}, \frac{p^2}{2m}, \tag{7}$$

$$\overline{\alpha_i}(q) = \int \alpha_i \psi_q(t=0) \varphi_0 d\mathbf{p}, \tag{8}$$

そして $\mathcal{P}_h$ は linear mode Λ の Projection operator である。(6)式はいわゆる mode−mode coupling を表わしている。この項から long tail はでてくる。

参 考 文 献

1) E.H.Hauge, Phys. Rev. Letters 28 (1972) 1501.

2) H.Mori and H.Fujisaka 49 (1973) 764.